Baccalauréat 2018

Session Normale

Série : Sciences de la Nature
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle.
Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale.
Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale.
Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale.
On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les évènements suivants :
A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite» ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale».
Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A\cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_{\overline{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x)=\frac{1}{20}$	$f(x)=\frac{1}{40}$	$f(x)=\frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$.

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$ — 0,5pt

b) Calculer $P(i)$ — 0,5pt

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$. — 0.5pt

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. — 0,5pt

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=1-i$ et $z_C=2+2i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0,5pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0,25pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1$. — 0,5pt

3° Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=(z_C)^n$ et $v_n=|z_n|$.

a) Vérifier que $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n. — 0,5pt

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. — 0,5pt

c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ — 0.5pt

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-1+2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0,5pt

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. — 0,5pt

c) Montrer que la droite D d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative entre (C) et D. — 0,5pt

2° a) Calculer la dérivée f' puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de f est $f''(x)=(2x-4)e^{-x}$ — 0,5pt

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées. — 0,25pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire que f' est positive. — 0,5pt

d) Dresser le tableau de variation de f. — 0,5pt

3° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $0.2<\alpha<0.3$ — 0,5pt

b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à l'asymptote D. Donner une équation de T. — 0,5pt

c) Tracer D, T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0,5pt

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $-m-1+2xe^{-x}=0$ — 0,25pt

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2+x+x\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement. — (0,75pt)

b) Vérifier que $f(x)=\frac{2}{x}+1+\ln x$ — (0,5pt)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement — (0,5pt)

2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. — (1pt)

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=1$ — (0,5pt)

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;2]$

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. — (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, où g^{-1} est la fonction réciproque de g. — (0,5pt)

c) Calculer $(g^{-1})'(3)$ (on pourra utiliser 2° b)) — (0,25pt)

d) Construire (C), (C′) et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où (C′) est la courbe de g^{-1}. — (0,5pt)

4°) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de h. — (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α, telle que $2<\alpha<3$. Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et en déduire que $\forall x\geq\alpha$ on a $f(x)-x\leq0$ — (0.5pt)

5°) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $u_n\geq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$. — (0,25pt)

b) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que (u_n) est convergente. — (0,25pt)

6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K=\int_1^e \ln x\,dx$. — (0,25pt)

b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ — (0.25pt)

Fin